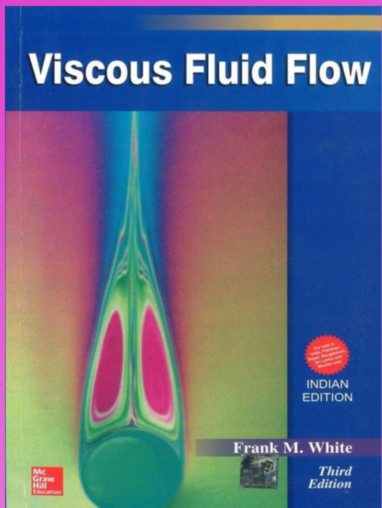


مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود

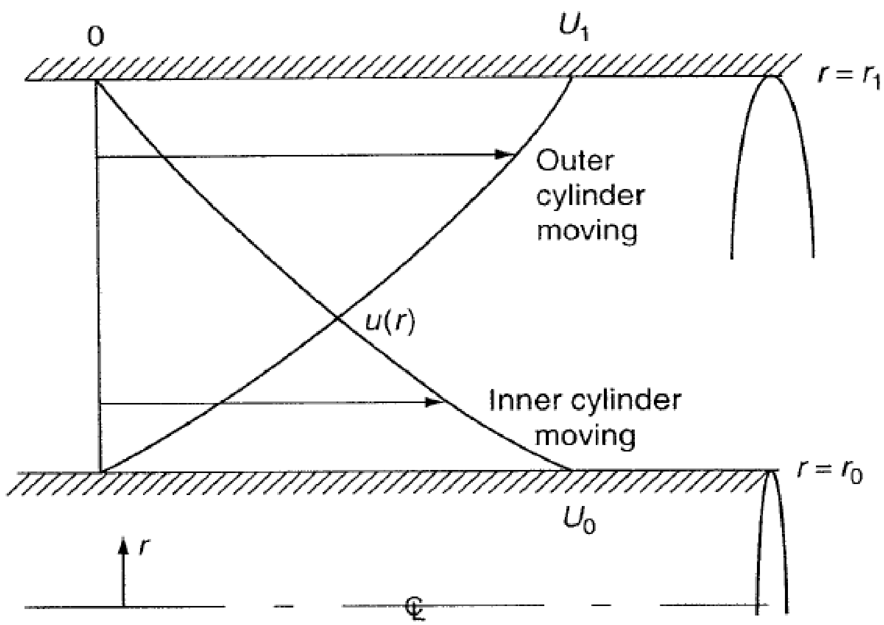
دانشکده مهندسی مکانیک

فصل سوم: جریان های داخلی آرام و حل های تحلیلی دقیق در مکانیک سیالات جریان آرام – بخش اول

کلاس درس دکتر نوروزی

خرداد ۱۴۰۰

جریان بین استوانه های هم‌مرکز:



فرضیات: جریان دائمی، استوانه ها طویل

توجه: گرادیان فشار عامل جریان نیست.

معادلات حاکم:

$$\begin{cases} \nabla.\vec{v} = 0 \\ \rho \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \end{cases}$$

طویل بودن استوانه ها: $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$ متقارن محوری: $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = 0$

از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \rightarrow rv_r = C_0 \rightarrow v_r = 0$$

توجه: v_θ نیز صفر است.

از معادله مومنتوم داریم:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

با توجه به شرایط ساده کننده جریان، داریم:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r}=0\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r}=f\end{array}\right\}\Rightarrow f'+\frac{1}{r}f=0\xrightarrow[\text{integral}]{Factor}e^{\int\frac{1}{r}dr}=e^{\ln(r)}=r$$

$$f'+\frac{1}{r}f=0\xrightarrow{\times r}rf'+f=0\rightarrow\frac{d}{dr}\left(rf\right)=0$$

$$rf=C_1\rightarrow f=\frac{C_1}{r}\rightarrow\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{C_1}{r}\rightarrow v_z=C_1\ln(r)+C_2$$

$$\begin{cases}at:r=r_0\rightarrow v_z=U_0\Rightarrow U_0=C_1\ln\left(r_0\right)+C_2\\ at:r=r_1\rightarrow v_z=U_1\Rightarrow U_1=C_1\ln\left(r_1\right)+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1\ln(\frac{r_0}{r_1})=U_0-U_1\rightarrow C_1=\dfrac{U_0-U_1}{\ln(\frac{r_0}{r_1})}\\ C_2=U_1-C_1\ln\left(r_1\right)\rightarrow C_2=U_1-\dfrac{U_0-U_1}{\ln(\frac{r_0}{r_1})}\ln\left(r_1\right)\end{cases}$$

حالات خاص:

چنانچه استوانه داخلی تنها حرکت کند، داریم:

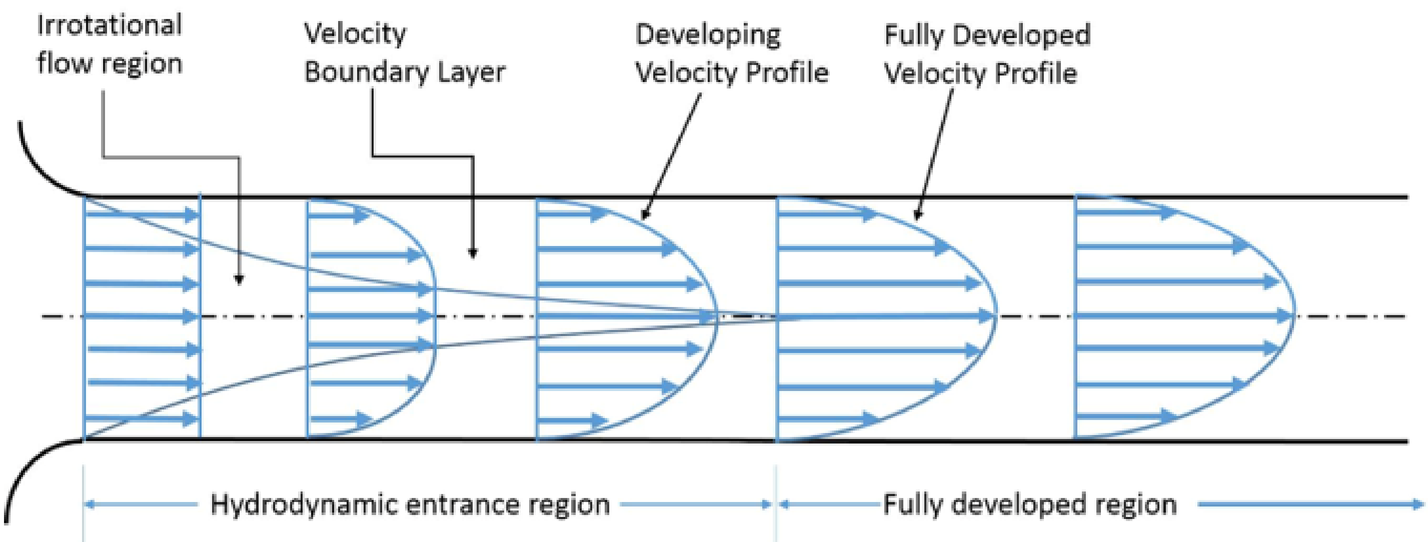
$$\begin{cases} u = U_0 \dfrac{\ln(\dfrac{r_1}{r})}{\ln(\dfrac{r_1}{r_0})} \\ \tau = \dfrac{-\mu U_0}{r \ln(\dfrac{r_1}{r_0})} \end{cases}$$

چنانچه فقط استوانه خارجی حرکت کند، داریم:

$$\begin{cases} u = U_1 \dfrac{\ln(\dfrac{r}{r_0})}{\ln(\dfrac{r_1}{r_0})} \\ \tau = \dfrac{\mu U_1}{r \ln(\dfrac{r_1}{r_0})} \end{cases}$$

جریان پوازیه درون کانال:

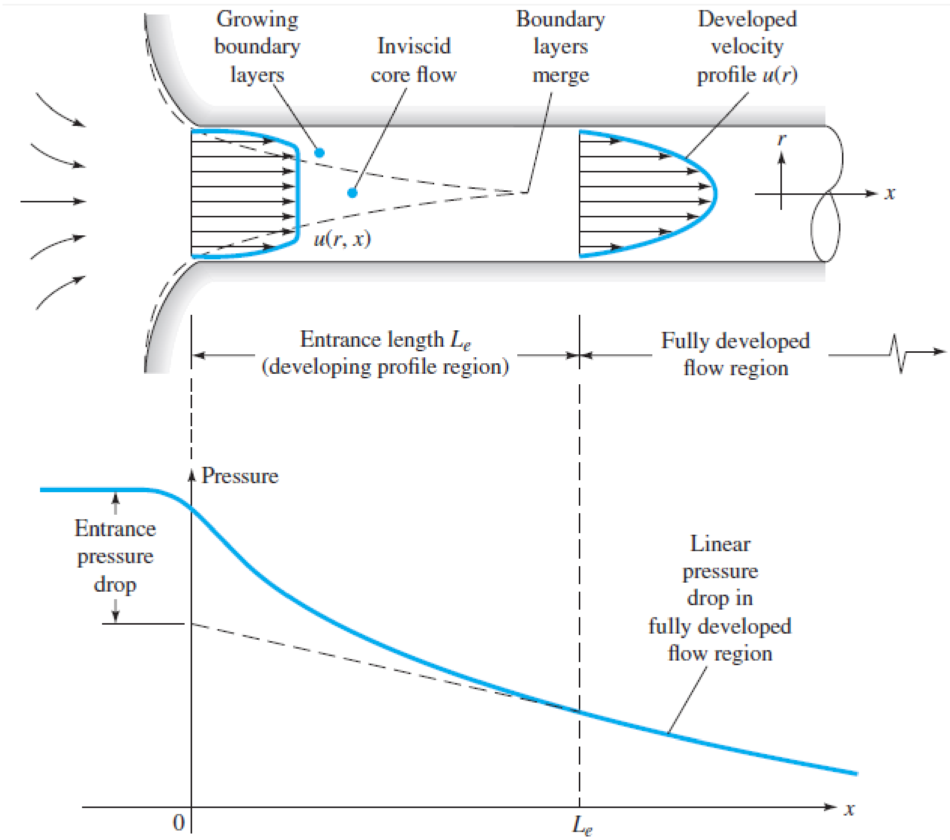
جریان پوازیه، از جمله جریان های مهم کاربردی در مکانیک سیالات است.

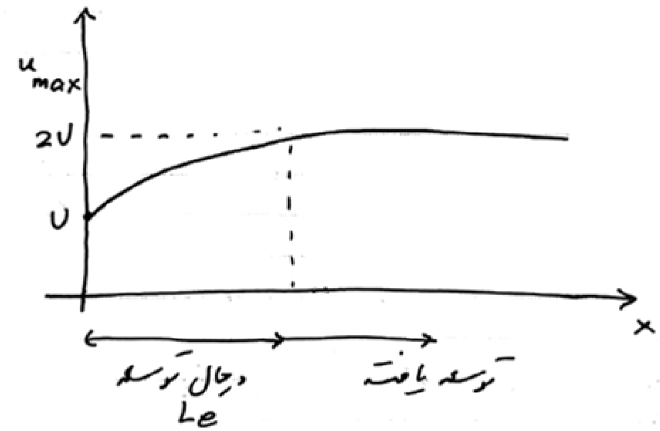


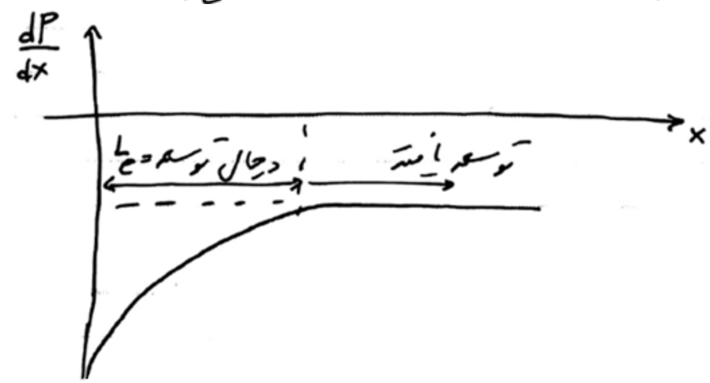
- در ناحیه درحال توسعه، جریان Rectilinear نیست، یعنی جریان دارای مولفه سرعت عرضی نیز هست.
- در ناحیه در حال توسعه، گرادیان فشار محوری ثابت نبوده و جریان شتاب دار (البته از نوع کاهنده) است.

جریان آرام درون لوله مستقیم:

- جریان در ناحیه توسعه یافته، در لایه مرزی غرق شده است.







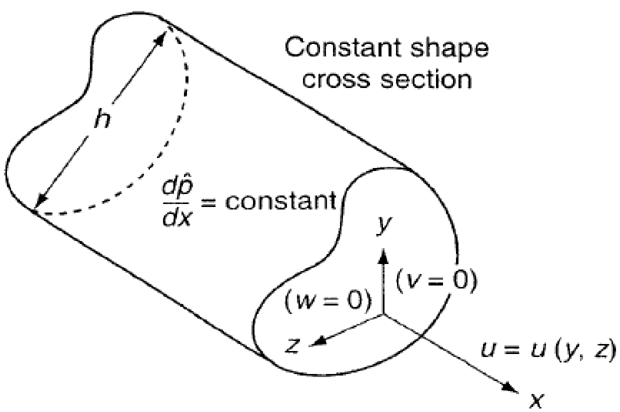
- هنوز حل Exact برای ناحیه در حال توسعه، ارائه نشده است.

شاه و لندن نشان دادند که برای جریان آرام:

$$\begin{cases} \dfrac{l_e}{D_h} = 0.5 + 0.05\,\mathrm{Re}_{D_h} \\ \mathrm{Re}_{D_h} = \dfrac{\rho \bar{U} D_h}{\mu} \end{cases}$$

چنانچه $\mathrm{Re}_{turbulent} = 2000$ باشد، l_e حداکثر 100 برابر قطر خواهد بود.

- می توان نشان داد که در جریان سیالات نیوتنی، صرف نظر از شکل مقطع جریان در ناحیه توسعه یافته، جریان Rectilinear (مستقیم الخط) است:



$$\begin{cases} u = u(y, z) \\ v = w = 0 \end{cases}$$

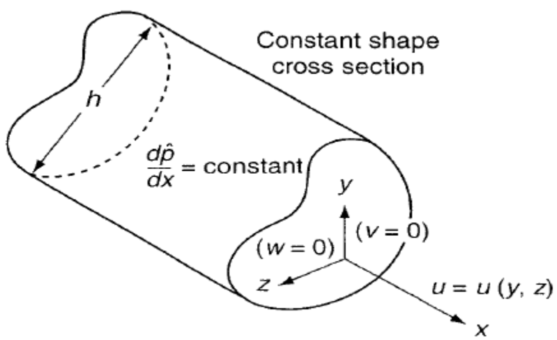
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{dp}{dx} = cte \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب، جریان های توسعه یافته سیالات نیوتنی از معادله پواسون تبعیت می کنند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx} = cte \\ at\ : walls \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

جریان های مستقیم الخط:

جریان هایی مستقیم الخط نامیده می شوند که در آنها:



$$\begin{cases} u = u(y, z) \\ v = w = 0 \end{cases}$$

جریان های توسعه یافته و آرام سیالات نیوتنی در کانال های مستقیم، مستقیم الخط هستند.

اثبات: در جریان توسعه یافته، برای میدان سرعت داریم:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

برای جریان توسعه یافته، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ v\,\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\,\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ v\,\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\,\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

لم: پاسخ معادلات دیفرانسیل همگن با شرایط مرزی دیریکله همگن، صفر است.

روی دیواره :

$$\begin{cases} v=w=0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial n}=0 \end{cases}$$

از آنجا که سه معادله و سه مجهول فوق فقط برحسب مشتقات y و z هستند، لذا نتیجه می شود:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} v &\neq v(y,z) \\ w &\neq w(y,z) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=0} v = w = 0 \\ p \neq p(y,z) \rightarrow \end{cases}$$

(توجه: شرایط مرزی فشار، دیریکله نیست.)

لذا برای معادله X - مومنتوم داریم:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \rightarrow \begin{cases} u = u(y,z) \\ v = w = 0 \\ p = p(x) \end{cases}$$

- جریان در لوله:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

جریان در لوله مستقیم، متقارن محوری است. پس:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})=\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dz}\rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{dp}{dz}+C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dz}+\frac{C_1}{r}\rightarrow u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}+C_1\ln\left(r\right)+C_2$$

$$\begin{cases} at: r=0\rightarrow u=Finite\rightarrow C_1=0 \\ at: r=r_0\rightarrow u=0\rightarrow C_2=\dfrac{-r_0^2}{4\mu}\dfrac{dp}{dz} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{r_0^2}{4\mu}\left(-\dfrac{dp}{dz}\right)\left\{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\right\} \\ u_{\max}=\dfrac{r_0^2}{4\mu}\left(-\dfrac{dp}{dz}\right) \end{array}\right\}\Rightarrow u=u_{\max}\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}\rightarrow$$ پروفیل سهموی

سرعت متوسط:

$$Q = \int_A u dA = \int_0^{r_0} u \times 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dz}\right) \xrightarrow[A=\pi r_0^2]{Q=\bar{U}A} \bar{U} = \frac{r_0^2}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dz}\right) \to \bar{U} = \frac{u_{\max}}{2} \to u = 2\bar{U}\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}$$

تنش برشی دیواره:

$$\tau_w = -\mu \frac{du}{dr}\bigg|_{at\, : r = r_0} = -\frac{r_0}{2}\frac{dp}{dz} = \frac{4\mu\bar{U}}{r_0}$$

ضریب اصطکاک دارسی وتیزباخ:

$$h_{loss} = f\,\frac{L}{D}\frac{\bar{U}^2}{2g} \rightarrow \frac{-\Delta p}{\rho g} = f\,\frac{L}{D}\frac{\bar{U}^2}{2g}$$

$$\frac{-\Delta p}{L} = f\,\frac{\rho}{D}\frac{\bar{U}^2}{2} \rightarrow \frac{-dp}{dz} = f\,\frac{\rho\bar{U}^2}{2D}$$

$$\frac{8\mu\bar{U}}{r_0^2} = f\,\frac{\rho\bar{U}^2}{2D} \rightarrow \frac{8\mu\bar{U}}{\frac{D^2}{4}} = f\,\frac{\rho\bar{U}^2}{2D}$$

$$\frac{64}{\frac{\rho\bar{U}D}{\mu}} = f \rightarrow f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} = \frac{\frac{4\mu\bar{U}}{r_0}}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} = \frac{16}{\frac{\rho\bar{U}D}{\mu}} \rightarrow c_f = \frac{16}{\mathrm{Re}}$$

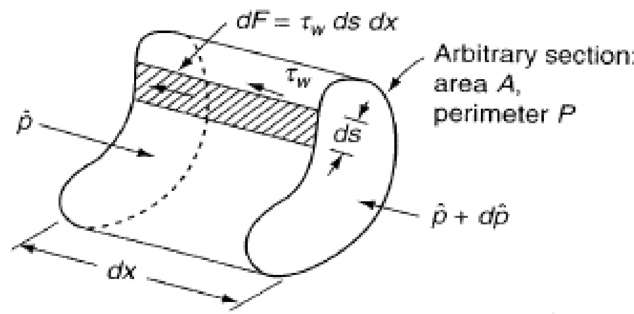
در لوله مستقیم و در جریان آرام توسعه یافته:

$$f = 4c_f$$

عدد پوازیه بصورت حاصلضرب ضریب c_f در Re تعریف می شود. در اینجا:

$$Po = c_f \,\mathrm{Re} = 16$$

مفهوم قطر هیدرولیکی در کانال های غیر مدور:



تنش برشی متوسط محیطی : $\overline{\tau}_w = \dfrac{1}{\Gamma}\displaystyle\int_\Gamma \tau_w \, ds$

محیط لوله

dp منفی است

در حالت تعادل: $\left\{\displaystyle\int_\Gamma \tau_w \, ds\right\} dx + A\, dp = 0$

$$\left\{\overline{\tau}_w \Gamma\right\} dx = -A\, dp \rightarrow \overline{\tau}_w = \frac{-A}{\Gamma}\frac{dp}{dx}$$

در لوله مستقیم مدور:

$$\overline{\tau}_w = \frac{-r_0}{2}\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{A}{\Gamma} = \frac{r_0}{2}$$

به عبارت دیگر:

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{D}{4} \rightarrow D = \frac{4A}{\Gamma}$$

برای هر کانال غیر مدور، می توان نوشت:

$$D_h = \frac{4A}{\Gamma}$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\tau}_w &= \frac{-r_0}{2}\frac{dp}{dx} \\ D_h &= \frac{4A}{\Gamma} \end{aligned}\right\} \rightarrow \overline{\tau}_w = \frac{-D_h}{4}\frac{dp}{dx}$$

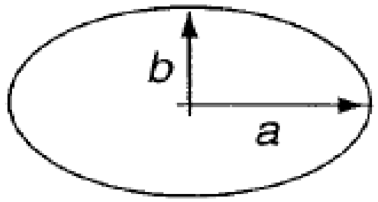
- قطر هیدرولیکی بر این مبنا تعریف شده است که متوسط تنش برشی دیواره در کانال مستقیم غیر مدور دارای آنالوژی با لوله مستقیم باشد (یعنی نحوه محاسبه شان یکسان باشد).

- این تعریف، در بعضی مواقع چندان موفق نیست. (مثلا در جریان بین دو لوله غیر هم مرکز)

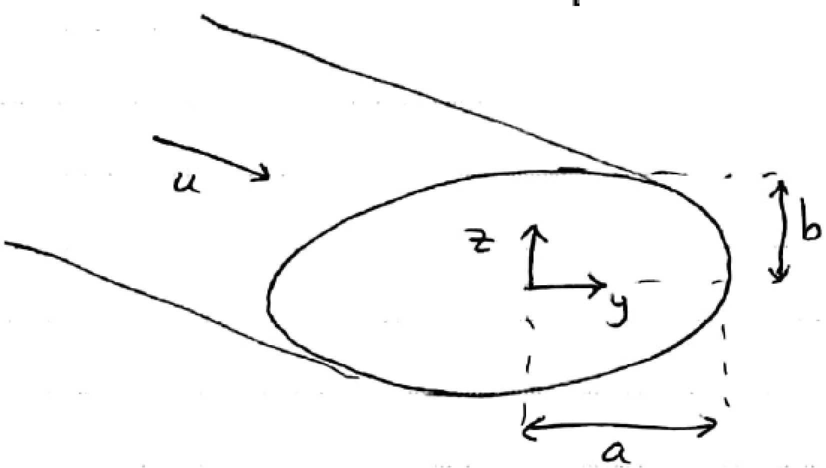
$$D_h = \frac{\overbrace{4A}^{\text{مساحت}}}{\underbrace{\Gamma}_{\text{محیط تر شده}}}$$

جریان های پوازیه در کانال های غیر مدور:

- جریان در کانال بیضوی:



Ellipse



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$at:\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\rightarrow u=0$$

$$u(y,z)=v(y,z)+C_1y^2+C_2z^2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2C_1+2C_2=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

فرض کنیم $2C_1+2C_2=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$ باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

روی مرز : $u(y,z)=v(y,z)+C_1y^2+C_2z^2=0$

$$v=-C_1y^2-C_2z^2=-C_1(y^2+\frac{C_2}{C_1}z^2)$$

فرض کنیم $\frac{C_2}{C_1}=\frac{a^2}{b^2}$ باشد؛ در اینصورت داریم:

روی مرز : $v=-C_1(y^2+\frac{a^2}{b^2}z^2)=-C_1a^2(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2})=-C_1a^2$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0\\ v=-C_1a^2 \quad \text{روی مرز :}\end{cases}$$

$$v(y,z)=w(y,z)-C_1a^2 \rightarrow \begin{cases}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\\ w(y,z)=0 \quad \text{روی مرز :}\end{cases}$$

لم: پاسخ هر معادله خطی همگن با شرایط مرزی همگن، در صورتی که معادله مقدار ویژه نباشد، صفر است.

بنابراین: $w(y,z)=0$ (در کل دامنه حل)

و لذا: $v(y,z)=-C_1 a^2$ (در کل دامنه حل)

از طرفی داشتیم: $u=v+C_1 y^2+C_2 z^2=-C_1 a^2+C_1 y^2+\dfrac{a^2}{b^2}C_1 z^2$

$$u=-C_1 a^2\left[1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right]$$

با قرار دادن حل فوق در معادله حاکم داریم:

$$2C_1 a^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\rightarrow C_1=\frac{1}{2\mu}\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow u=u_{\max}\left[1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right]\quad ,\quad u_{\max}=-C_1 a^2=\frac{-1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$$

محاسبه دبی جریان:

$$Q=\oiint_{\Omega} u(y,z)\,dydz$$

$$\overbrace{\frac{y^2}{a^2}}^{Y^2}+\overbrace{\frac{z^2}{b^2}}^{Z^2}=1 \quad , \quad Y=\frac{y}{a} \quad , \quad Z=\frac{z}{b}$$

$$Y^2+Z^2=1 \xrightarrow{\textbf{polar coordinate system}} \begin{cases} Y=\mathrm{r}\cos\theta, 0\le\theta\le 2\pi \\ Z=r\sin\theta, 0\le r\le 1 \end{cases}$$

پس : $\begin{cases} \dfrac{y}{a}=\mathrm{r}\cos\theta \\ \dfrac{z}{b}=r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=a\,\mathrm{r}\cos\theta \\ z=br\sin\theta \end{cases}$

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\end{bmatrix}\rightarrow J=\begin{bmatrix}a\cos\theta & b\sin\theta\\ -a\,\mathrm{r}\sin\theta & br\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\left|J\right|=abr\cos^2\theta+abr\sin^2\theta\rightarrow\left|J\right|=abr$$

$$Q=\oiint_{\Omega}u(y,z)dydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\left|J\right|drd\theta$$

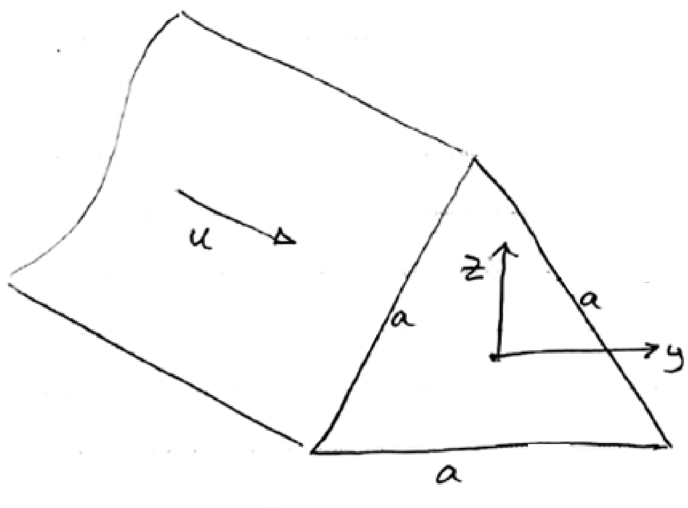
$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_{\max}\left[1-r^2\right]abrdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 u_{\max}\left[r-r^3\right]abrdrd\theta$$

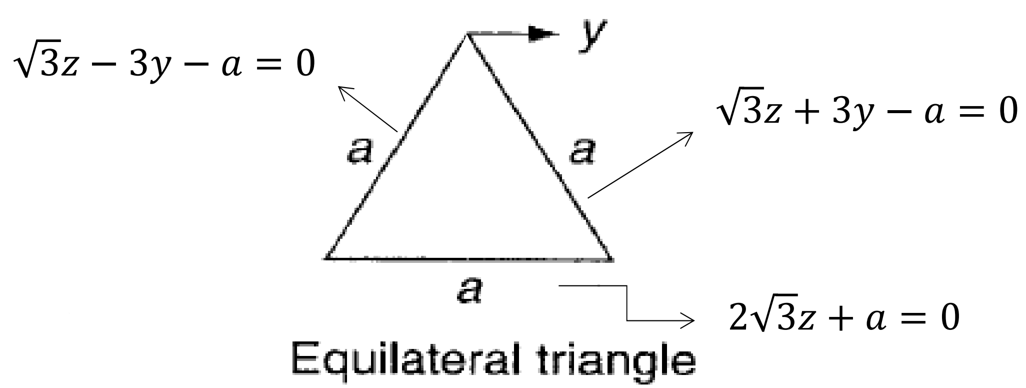
$$Q=\int_0^{2\pi}u_{\max}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^1 abd\theta=-u_{\max}\frac{ab}{4}\times 2\pi$$

$$Q=-u_{\max}\frac{\pi ab}{2}\rightarrow Q=\frac{\pi}{4\mu}\frac{dp}{dx}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$$

جریان پوازیه در یک کانال دارای مقطع مثلثی متساوی الاضلاع:

در این جریان، مبدا مختصات را در مرکز مثلث (نقطه همرسی عمودمنصف ها) قرار می دهیم. در این مثلث، نقطه همرسی میانه ها و عمودمنصف ها بر هم منطبق است.





در فوق، معادله سه ضلع مثلث نسبت به دستگاه مختصات تعریف شده آمده است.

معادله حاکم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

فرض کنیم:

$$u(y,z) = v(y,z) + \underbrace{A(2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a)}_{\text{مقدار این تابع روی مرزها همواره صفر است } (f)}$$

با قرار دادن توزیع فوق در معادله حاکم، داریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \underbrace{-18A(2\sqrt{3}z + a)}_{\text{مشتق دوم نسبت به y}} \underbrace{+18A(2\sqrt{3}z - a)}_{\text{مشتق دوم نسبت به z}} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 36Aa = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

با در نظر گرفتن $-36Aa = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$ ، داریم:

$$A = \frac{-1}{36\mu a}\frac{dp}{dx}$$

همچنین:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ \text{روی مرز} \quad : v(y,z) = 0 \xrightarrow{because} (u(y,z) = v(y,z) + \underset{\text{صفر}}{f} = 0) \end{cases}$$

پس $v(y,z) = 0$ و در نتیجه:

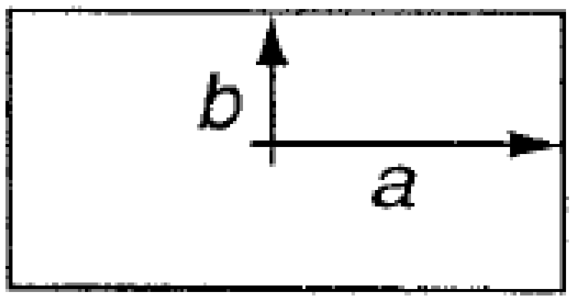
$$u(y,z) = \frac{-1}{36\mu a}\frac{dp}{dx}(2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a)$$

و همچنین، دبی جریان با استفاده از نگاشت مناسب بصورت زیر خواهد بود:

$$Q = \frac{-\sqrt{3}a^4}{320\mu}\frac{dp}{dx}$$

جریان پوازیه در یک کانال مستطیلی:

دستگاه مختصات در مرکز کانال قرار دارد.



Rectangle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\begin{cases} at: y=0 \rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ at: y=a \rightarrow u=0 \\ at: z=0 \rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial z}=0 \\ at: z=b \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$u = u(y, z) = f(y)g(z)$$

از حل معادله همگن، داریم:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = 0 \rightarrow f''g + fg'' = 0$$

$$\frac{f''}{-f} = \frac{g''}{g} = \lambda^2 \rightarrow \begin{cases} f'' + \lambda^2 f = 0 \\ g'' - \lambda^2 g = 0 \end{cases}$$

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \rightarrow f(y) = A\cos\lambda y + B\sin\lambda y$$

$$at: y = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'(y) = -A\lambda\sin\lambda y + B\lambda\cos\lambda y \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$f(y) = A\cos\lambda y \quad , \quad at: y = a \rightarrow u = 0 \rightarrow f(a) = 0$$

$$A\cos\lambda a = 0 \rightarrow \lambda a = \frac{n\pi}{2} \quad , \quad$$ n های فرد $\rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{2a}$, n های فرد

$$u(y,z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} g(z)\cos\frac{n\pi y}{2a}$$

معادله غیر همگن دارای توابع ویژه به فرم معادله همگن است

با قرار دادن u در معادله دیفرانسیل حاکم، داریم:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{-\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 g(z) + g''(z)\right\}\cos\frac{n\pi y}{2a} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

سمت راست معادله باید به صورت سری با تابع ویژه $\cos\frac{n\pi y}{2a}$ بازنویسی شود:

$$\sum a_n \cos\lambda_n y = h(y) \rightarrow a_n = \frac{\int_0^a s(y)h(y)\cos(\lambda_n y)dy}{\int_0^a s(y)\cos^2(\lambda_n y)dy}$$

در اینجا $s(y)=1$ است و همچنین، $\int_0^a \cos^2(\lambda_n)dy = \frac{a}{2}$، بنابراین:

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\cos(\lambda_n y)dy = \left[\frac{2}{\mu a}\frac{dp}{dx}\frac{\sin(\lambda_n y)}{\lambda_n}\right]_0^a$$

$$a_n = \frac{2}{\mu a}\frac{dp}{dx}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2a}\times a)}{\frac{n\pi}{2a}} = \frac{4}{\mu n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})\frac{dp}{dx} = \frac{4}{\mu n\pi}\frac{dp}{dx}(-1)^{(\frac{n-1}{2})}$$

$$g''(z) - (\frac{n\pi}{2a})^2 g(z) = \frac{4}{\mu n\pi}\frac{dp}{dx}(-1)^{(\frac{n-1}{2})}$$

$$r^2 - (\frac{n\pi}{2a})^2 = 0 \rightarrow r = \pm\frac{n\pi}{2a}$$

$$g(z)=C_1\cosh(\frac{n\pi}{2a}z)+C_2\sinh(\frac{n\pi}{2a}z)+\underbrace{Q(z)}_{\text{جواب خصوصی}}$$

$$-(\frac{n\pi}{2a})^2 Q(z)=\frac{4}{\mu n\pi}\frac{dp}{dx}(-1)^{(\frac{n-1}{2})}$$

$$Q(z)=-\frac{16a^2}{\mu n^3\pi^3}\frac{dp}{dx}(-1)^{(\frac{n-1}{2})}$$

$$at: z=0\rightarrow u=0\rightarrow g'(0)=0\rightarrow C_2=0$$

$$at: z=b\rightarrow u=0\rightarrow g(b)=0\rightarrow C_1=\frac{1}{\cosh(\frac{n\pi}{2a}b)}\left(\frac{16a^2}{\mu n^3\pi^3}\right)\frac{dp}{dx}(-1)^{(\frac{n-1}{2})}$$

$$u(y,z)=\frac{16a^2}{\mu\pi^3}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left\{1-\frac{\cosh(\frac{n\pi}{2a}z)}{\cosh(\frac{n\pi}{2a}b)}\right\}\frac{(-1)^{(\frac{n-1}{2})}}{n^3}\cos(\frac{n\pi}{2a}y)$$

$$Q=\frac{4ba^3}{3\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left[1-\frac{192a}{\pi^5 b}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\tanh(\frac{n\pi}{2a}b)}{n^5}\right]$$

در کتاب وایت، پاسخ های دیگری برای جریان در یک قطاع دایره ای، بین دو لوله هم مرکز و غیر هم مرکز و شکل های دیگر ارائه شده است. (صفحات 120 تا 122 کتاب)

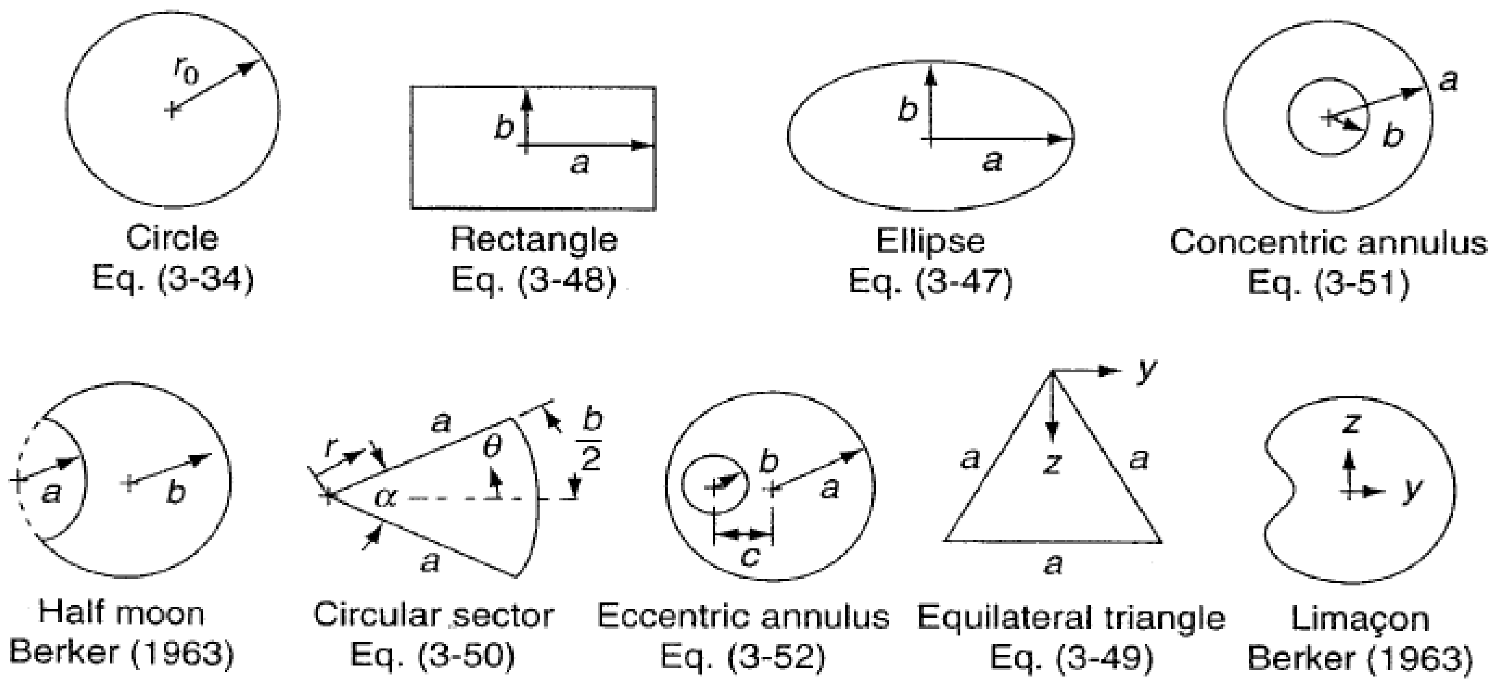
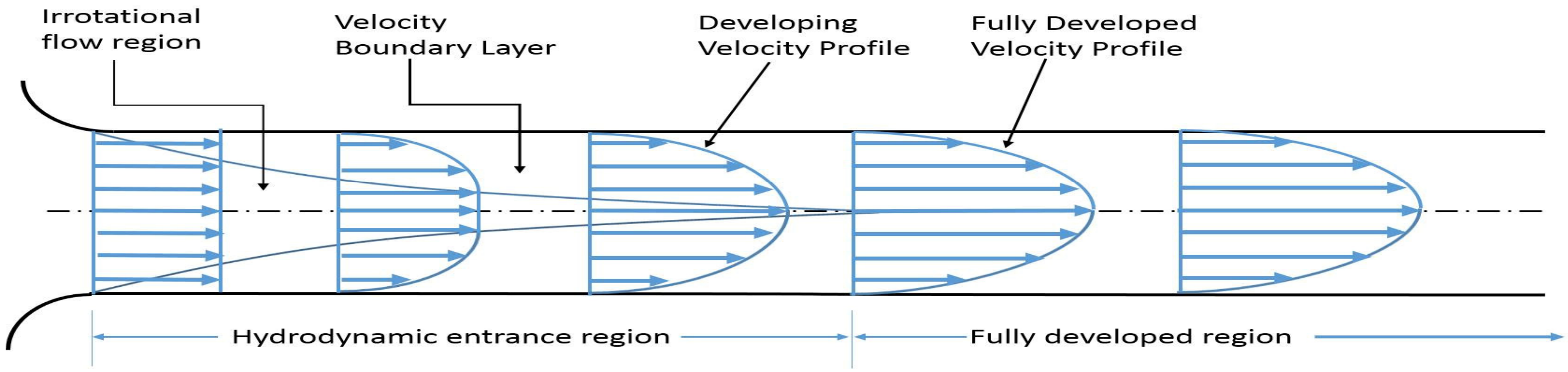


FIGURE 3-9
Some cross sections for which fully developed flow solutions are known; for still more, consult Berker (1963, pp. 67ff.) or Shah and London (1978).

جریان غیر دائم توسعه یافته درون لوله مدور:



هدف: حل جریان گذرا (از حال سکون) به شرایط steady است.

معادله حاکم:

$$
\begin{cases}
\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{dp}{dx} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) \\
Initial\ Condition\ at: t = 0 \rightarrow u(r, t=0) = 0 \\
Boundary\ Condition: \begin{cases} at: r = 0 \rightarrow u = Finite \\ at: r = r_0 \rightarrow u = 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

از آنجا که معادله ناهمگن و جمله غیر همگن تابع زمان نیست، می توان نوشت:

$$u(r,t)=v(r,t)+w(r)$$

که $w(r)$ دربرگیرنده پاسخ steady است. بنابراین، چنانچه داشته باشیم:

$$-\frac{dp}{dx}+\mu(w''+\frac{1}{r}w')=0$$

$$\begin{cases} w(0)=Finite \\ w(r_0)=0 \end{cases}$$

$$w''+\frac{1}{r}w'=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\rightarrow rw''+w'=\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dx}\rightarrow\frac{d}{dr}(rw')=\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$rw'=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2}+C_1'\rightarrow w'=\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}r+\frac{C_1'}{r}\rightarrow w=\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2+C_1'Ln(r)+C_2'$$

$$\begin{cases} at: r=0\rightarrow w=Finite\rightarrow C_1'=0 \\ at: r=r_0\rightarrow w=0\rightarrow C_2'=\frac{-1}{4\mu}\frac{dp}{dx}{r_0}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \frac{-r_0^{\,2}}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

$$\xrightarrow{or} w = u_{\max}\left(1-\left(r^*\right)^2\right) \rightarrow \begin{cases} u_{\max} = \dfrac{-r_0^{\,2}}{4\mu}\dfrac{dp}{dx} \\ r^* = \dfrac{r}{r_0} \end{cases}$$

مشاهده می شود که w در واقع پاسخ بخش steady است.

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$$\begin{cases} v\,(r = 0, t) = Finite \\ v\,(r = r_0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$$v(r,t)=R(r)T(t)$$

$$R\dot{T}=\nu\left(R''T+\frac{1}{r}R'T\right)$$

$$\frac{\dot{T}}{\nu T}=\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\gamma_n^{\ 2}\rightarrow\begin{cases}R''+\frac{1}{r}R'+\gamma_n^{\ 2}R=0\\ \ddot{T}+\nu\gamma_n^{\ 2}T=0\end{cases}$$

$$R''+\frac{1}{r}R'+\gamma_n^{\ 2}R=0\rightarrow\frac{d}{dr}(rR')+r\gamma_n^{\ 2}R=0$$

$$\alpha=1,\beta=1,\gamma_n=real$$

ضرایب بسل : $\nu=0,\mu=1,\frac{\nu}{\mu}=0$

$$R(r)=C_1J_0(\gamma_n r)+C_2Y_0(\gamma_n r)$$

$$\begin{cases} at: r=0 \rightarrow v = Finite \rightarrow C_2 = 0 \\ at: r=r_0 \rightarrow v=0 \Rightarrow J_0(\gamma_n r_0)=0 \end{cases}$$

از حل این معادله، مقادیر ویژه پیدا می شوند $J_0(\lambda_n)=0 \rightarrow$ تغییر متغیر

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n}{r_0} \rightarrow R(r) = C_1 J_0(\lambda_n \frac{r}{r_0})$$

$R(r^*) = C_1 J_0(\lambda_n r^*) \Rightarrow$ تابع ویژه $\phi_n(r^*) = J_0(\lambda_n r^*)$

First ten roots of the Bessel function $J_0^\dagger$

n	λ_n	$J_1(\lambda_n)$
1	2.4048	0.5191
2	5.5201	–0.3403
3	8.6537	0.2715
4	11.7915	–0.2325
5	14.9309	0.2065
6	18.0711	–0.1877
7	21.2116	0.1733
8	24.3525	–0.1617
9	27.4935	0.1522
10	30.6346	–0.1442

بازنویسی فرم اشتروم لیوویل معادله R:

$$a_1 y'' + a_2 y' + (a_3 + \lambda) y = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \text{ , } a_2 = \frac{1}{r} \text{ , } a_3 = 0 \\ p = \exp\left(\int \frac{a_2}{a_1} dr\right) = e^{Ln(r)} = r \\ q = 0 \\ s = \frac{p}{a_1} \rightarrow \underbrace{s = r \xrightarrow{\text{فرم بی بعد}} \overbrace{s = r^*}^{\text{تابع وزن}}} \end{cases}$$

چون s هم در صورت و هم در مخرج شرکت می کند، بنابراین بعد آن مهم نیست.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \rightarrow a_n=\frac{\int s\,\phi_n(x) f(x)\,dx}{\int s\,\phi_n^{\,2}(x)\,dx}$$

$$\dot{T}+\nu\gamma_n^{\,2} T=0 \rightarrow T(t)=C\exp(-\nu\gamma_n^{\,2} t)$$

$$v_n(r^*,t)=a_n J_0(\lambda_n r^*)\exp\left(-\frac{\nu\lambda_n^{\,2}}{r_0^{\,2}} t\right)$$

$$u(r^*,t)=v(r^*,t)+w(r^*)$$

$$u=u_{\max}\left(1-\left(r^*\right)^2\right)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r^*)\exp\left(-\frac{\nu\lambda_n^{\,2}}{r_0^{\,2}} t\right)$$

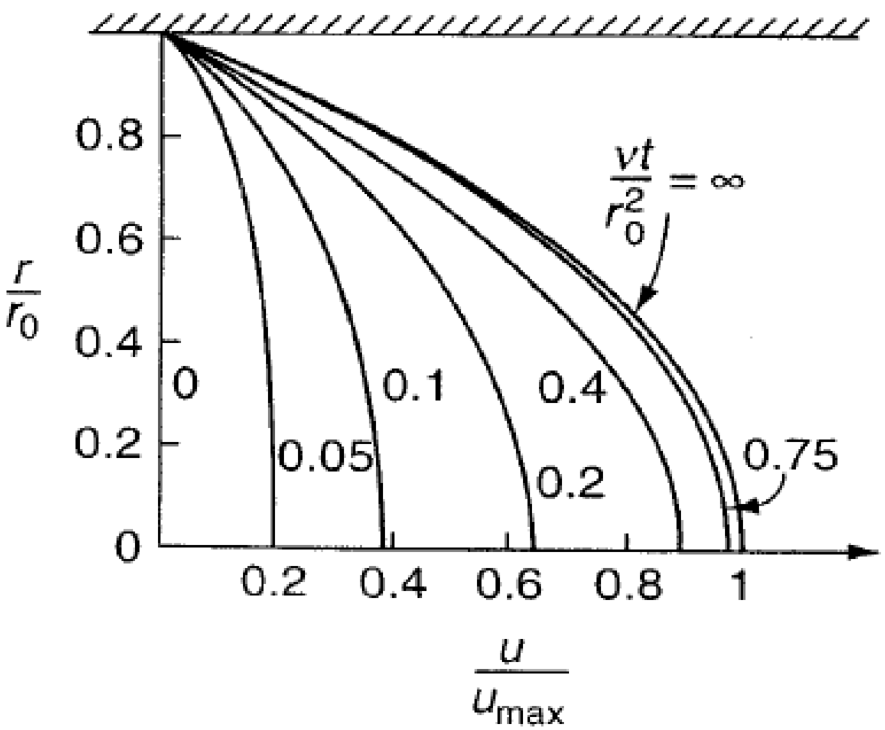
با اعمال شرط اولیه، ضریب a_n پیدا خواهد شد:

$$at: t=0 \rightarrow u=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r^*)=-u_{\max}\left(1-\left(r^*\right)^2\right)$$

$$a_n=\frac{\int_0^1 -u_{\max} r^*\left(1-\left(r^*\right)^2\right) J_0(\lambda_n r^*)\,dr^*}{\int_0^1 r^* J_0^{\,2}(\lambda_n r^*)\,dr^*}$$

با محاسبه انتگرال فوق (بر اساس خواص مشتقات توابع بسل)، داریم:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(1-\left(r^*\right)^2\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8J_0(\lambda_n r^*)}{\lambda_n{}^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\frac{\nu\lambda_n{}^2}{r_0{}^2}t\right)$$




The End